

文章编号: 1000-8055(2001) 04-0408-03

航空发动机 H_∞ 状态反馈控制的鲁棒稳定界

王 曦, 曾庆福

1. 北京航空航天大学 406 教研室, 北京 100083;
2. 西北工业大学 七系, 陕西 西安 710072

摘要: 对于航空发动机结构参数不确定性系统, 引用文献[1]的代数 Riccati 不等式负定裕度的概念, 给出了按基准模型设计 H_∞ 状态反馈控制器时确定鲁棒稳定界的方法及其扫描搜索算法。
关键词: 反馈控制; 不确定系统; 干扰; 鲁棒控制
中图分类号: V233.7 文献标识码: A

1 引言

H_∞ 控制理论近年来已用于航空发动机控制系统中^[2]。航空发动机结构参数在整个飞行包线范围内变化很大, 难以用 1 个鲁棒控制器对飞行干扰镇定, 根据飞行条件的变化范围确定鲁棒稳定界, 在飞行包线内的若干子域分区设计鲁棒控制器, 由此降低设计控制器的难度。

2 稳定界与 Riccati 不等式

定义 1^[3] 对于系统 $\dot{x} = Ax + Bw, z = Cx$, 设 $T_{zw}(s) = C(sI - A)^{-1}B$, 相应的 Hamiltonian 阵为:

$$H = \begin{bmatrix} A & Y^2 BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

定义代数 Riccati 函数为:

$$AR(H, X) = A^T X + XA + Y^2 X B B^T X + C^T C$$

则下列命题等价:

- (1) $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$;
- (2) 存在正定阵 $X > 0$, 使得 $AR(H, X) < 0$;

$$H_{\Delta K} = \begin{bmatrix} A + B_2 K + \Delta A + \Delta B_2 K & Y^2 B_1 B_1^T \\ - (C + DK)^T (C + DK) & - (A + B_2 K + \Delta A + \Delta B_2 K)^T \end{bmatrix}$$

在状态反馈控制律 $u = Kx$ 下, 对于任何 $F(t) \in \Omega$, 存在正定阵 $X > 0$, 使得 $AR(H_{\Delta K}, X) <$

(3) 存在 $\epsilon > 0$, 使得 Riccati 方程 $AR(H, X) + \epsilon I = 0$ 具有正定解 $X > 0$ 。

考虑如下结构参数摄动的被控对象 Σ_{Δ} :

$$\Sigma_{\Delta}: \begin{cases} \dot{x} = [A + \Delta A(t)]x + B_1 w + \\ [B_2 + \Delta B_2(t)]u \\ z = Cx + Du \end{cases}$$

其中:

$$\begin{aligned} [\Delta A(t) \quad \Delta B_2(t)] &= H F(t) [E_1 \quad E_2] \\ F(t) \in \Omega &= \{F(t) | F(t)^T F(t) \leq I, \\ F(t) &\in L^\infty[0, \infty), \forall t\} \end{aligned}$$

为不确定阵。 Σ_{Δ} 在状态反馈阵 $u = Kx$ 作用下构成闭环系统:

$$\Sigma_{\Delta K}: \begin{cases} \dot{x} = (A + B_2 K + \Delta A + \Delta B_2 K) \cdot \\ x + B_1 w \\ z = (C + DK)x \end{cases}$$

如果 $\Sigma_{\Delta K}$ 对于任何不确定性 $F(t) \in \Omega$ 是稳定的, 且能满足 $\|T_{zw}\| < \gamma$, 则闭环系统 $\Sigma_{\Delta K}$ 是鲁棒稳定的, 且对任何干扰信号 w 具有鲁棒抑制性能。

定义 2 对于闭环系统 $\Sigma_{\Delta K}$, 由定义 1 构造含不确定性的 Hamiltonian 阵:

$$H_{\Delta K} = \begin{bmatrix} A + B_2 K + \Delta A + \Delta B_2 K & Y^2 B_1 B_1^T \\ - (C + DK)^T (C + DK) & - (A + B_2 K + \Delta A + \Delta B_2 K)^T \end{bmatrix}$$

0, 则闭环系统 $\Sigma_{\Delta K}$ 是鲁棒 H_∞ 次最优的。

设对应于 Σ_{Δ} 的标称系统的状态空间基准模

型描述为:

$$\Sigma_l: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_{1w} + B_2u \\ z = Cx + Du \end{cases}$$

其中: (A, B_2) 能稳定, 在状态反馈控制 $u = Kx$ 的

定义 3 设 $H_K = \begin{bmatrix} A + B_2K & Y^2 B_1 B_1^T \\ - (C + DK)^T (C + DK) & - (A + B_2K)^T \end{bmatrix}$

若 Σ 在不确定性 $F(t) \in \Omega$ 的扰动下是鲁棒 H_∞ 次最优的, 通过状态反馈 $u = Kx$ 构成了鲁棒 H_∞ 次最优的 $\Sigma_{\Delta K}$ 系统, 则 $AR(H_{\Delta K}, X) < 0$ 等价于 $AR(H_{\Delta K}, X) + \Delta(\cdot) < 0$, 这时 $\Delta(\cdot)$ 表示了不确定性 $F_{\Delta}(t) \in \Omega_{\Delta}$ 对于基准模型 Σ_l 的最大可允许的扰动范围, 也即负定裕度^[1], 称 Ω_{Δ} 为相应的鲁棒稳定界。

3 鲁棒稳定界 Ω_{Δ} 的判据

考虑标称对象的状态反馈问题, 由定理 3. 2. 1^[1] 可知, Σ_l 的状态反馈解 K 存在的充分必要条件是, 给定 $\gamma > 0$, 存在 $\epsilon > 0$ 及正定阵 $X > 0$, 使得 Riccati 方程 $AR(H_K, X) + \epsilon I = 0$ 成立, 即:

$$A^T X + XA + \gamma^2 X B_1 B_1^T X + C^T C - (XB_2 + C^T D)(D^T D)^{-1}(B_2^T X + D^T C) + \epsilon I = 0 \tag{1}$$

令 $K = - (D^T D)^{-1}(B_2^T X + D^T C)$, 若式(1)对于 $\epsilon^* > 0$ 存在正定解 $X^* > 0$, 则对于 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$, 必存在正定解 $X > 0$, 因而 K 的解集为:

$K_{opt} = \{K | K \in R^{n \times n}, AR(H_K, X) < 0, X > 0\}$

引理 1^[1] 设 X 为 Riccati 不等式 $AR(H_K, X) < 0$ 的正定解, 给定 $\gamma > 0$ 及任一矩阵 Q , 则

$$(A + B_2 K^*)^T X^* + X^* (A + B_2 K^*) + \gamma^2 X^* B_1 B_1^T X^* + (C + DK^*)^T (C + DK^*) + \lambda^2 X^* H H^T X^* + \lambda^{-2} (E_1 + E_2 K^*)^T (E_1 + E_2 K^*) < 0$$

将式(2)和式(3)代入上式可得:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 X^* H H^T X^* + \lambda^{-2} [E_1 - E_2 (D^T D)^{-1} (B_2^T X^* + D^T C)] [E_1 - E_2 (D^T D)^{-1} (B_2^T X^* + D^T C)] < \epsilon^* I \\ \Rightarrow & \lambda^{-2} [E_2 (D^T D)^{-1} D^T C - E_1]^T E_2 (D^T D)^{-1} B_2^T X^* + \lambda^{-2} X^* B_2 (D^T D)^{-1} E_2^T [E_2 (D^T D)^{-1} D^T C - E_1] + \\ & X^* [\lambda^{-2} B_2 (D^T D)^{-1} E_2^T E_2 (D^T D)^{-1} B_2^T + \lambda^2 H H^T] X^* + \\ & \lambda^{-2} [C^T D (D^T D)^{-1} E_2^T E_2 (D^T D)^{-1} D^T C - C^T D (D^T D)^{-1} E_2^T E_1 - E_1^T E_2 (D^T D)^{-1} D^T C] < \epsilon^* I \\ \Rightarrow & AR[\tilde{H}_{\Delta K}(\lambda), X^*] - \lambda^{-2} (W + W^T) < \epsilon^* I \end{aligned}$$

即: $\rho\{AR[\tilde{H}_{\Delta K}(\lambda), X^*] - \lambda^{-2} (W + W^T)\} < \epsilon^* \tag{4}$

其中: $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$, $W = C^T D (D^T D)^{-1} E_2^T E_1$, $\tilde{H}_{\Delta K}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \tilde{B}^T \\ -\tilde{C}^T \tilde{C}^T & -\tilde{A}^T \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = \lambda^{-2} B_2 (D^T D)^{-1} E_2^T [E_2^T (D^T D)^{-1} D^T C - E_1], \quad \tilde{B} = [\lambda^{-1} B_2 (D^T D)^{-1} E_2^T \quad \mathcal{N}]$$

$$\tilde{C} = \lambda^{-1} \begin{bmatrix} E_2 (D^T D)^{-1} D^T C \\ E_1 \end{bmatrix}$$

作用下, 其闭环系统为:

$$\Sigma_{lK}: \begin{cases} \dot{x} = (A + B_2 K)x + B_{1w} \\ z = (C + DK)x \end{cases}$$

$AR(H_K, X)$ 的负定裕度定义为 $\beta(H_K, X, Q) = \sup_{\epsilon \in \mathbb{R}} \{ \epsilon | AR(H_K, X) + \epsilon Q^T Q < 0 \}$, 且 Riccati 方程 (1) 式具有正定解的最大负定裕度为:

$$\epsilon^* = \max_{K \in K_{opt}} \max_{X > 0} \beta(H_K, X^*, I) \tag{2}$$

相应控制器的解为:

$$K^* = - (D^T D)^{-1} (B_2^T X^* + D^T C) \tag{3}$$

设 Σ_l 在不确定性 $F(t) \in \Omega$ 的扰动下, 构成了 $\Sigma_{l\Delta}$, 考虑 $\Sigma_{l\Delta K}$ 在 $u = Kx$ 的作用下闭环系统 $\langle \Sigma_{l\Delta}, K \rangle$ 的内稳定及 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 的问题, 由定理 4. 2^[5] 可知, 这一问题等价于闭环系统 $\langle \Sigma_{l\Delta}, K \rangle$ 内稳定且 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$, 其中 $\Sigma_{l\Delta}$ 定义如下:

$$\Sigma_{l\Delta}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + (\gamma^{-1} B_1 \quad \mathcal{N}H) \tilde{w} + B_2 u \\ \tilde{z} = \begin{bmatrix} C \\ \lambda^{-1} E_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D \\ \lambda^{-1} E_2 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

将式 $u = K^* x$ 代入系统 $\Sigma_{l\Delta}$ 中, 可得闭环系统 $\Sigma_{l\Delta K}$:

$$\Sigma_{l\Delta K}: \begin{cases} \dot{x} = (A + B_2 K^*)x + (\gamma^{-1} B_1 \quad \mathcal{N}H) \tilde{w} \\ \tilde{z} = \begin{bmatrix} C + DK^* \\ \lambda^{-1} (E_1 + E_2 K^*) \end{bmatrix} x \end{cases}$$

由 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ 与 Riccati 不等式的关系可得:

通过以上分析和推导, 可得如下判据:

判据 设标称系统 Σ_1 对于 Riccati 方程(1) 式存在最大负定裕度 ϵ^* , 相应的控制器的解 K^* 由式(3) 给出, 当 Σ_1 在不确定性 $F_{\Delta}(t) \in \Omega_{\Delta}$ 的扰动下, 通过状态反馈 $u = K^* x$, 构成的闭环系统 $\Sigma_{\Delta 1K}$ 是鲁棒 H_{∞} 次最优的, 则鲁棒稳定界 Ω_{Δ} 由不等式(4) 确定。

航空发动机被控对象的状态空间通常可描述为^[5]:

$$\dot{x} = [A + \Delta A(t)]x + B_1 w + [B_2 + \Delta B_2(t)]u$$

$$z = Cx + Du$$

其中不确定阵 ΔA , ΔB_2 是飞行高度 H 和飞行马赫数 Ma 对标称系统产生的干扰, 设标记 $FLAG_i$, 则有

Ω_{Δ} 的扫描搜索算法:

(1) 给定干扰抑制指标 $\gamma > 0$, 在飞行包线内选定标称点, 给定一个比较大的初猜值 $\epsilon > 0$, 构成区间 $[0, \epsilon]$, 在该区间上用二分法对 Riccati 方程式(1) 进行搜索, 寻求 Riccati 方程式(1) 存在正定解 $X > 0$ 所对应的 ϵ , 按式(2) 求出 $AR(H, X)$ 的最大负定裕度 ϵ^* 及其对应的正定阵 $X^* > 0$, 由式(3) 可求出控制器 K^* 。

(2) 选定 $\lambda > 0$, 置搜索起点 $i = 1$, P_i 为对应的工作点($i = 1, \dots, n$)。

(3) 对 P_i 作 $[\Delta A \quad \Delta B_2] = HF(t)[E_1 \quad E_2]$ 分解^[5], 对式(4) 进行判别, 若成立则置 $FLAG_i = 1$; 否则置 $FLAG_i = -1$, 若 $i = n$ 则进到(4); 否则 $i = i + 1$, 重复(3)。

(4) 所有标记为 $FLAG_i = 1$ 的 P_i 点组成的集合构成了对于选定标称点的鲁棒稳定区域 Ω_{Δ} 。

(5) 在飞行包线内选定其他 m 个标称点, 重复(1)~(4) 的过程, 可求出 m 个控制器 K^* , 同时构成了 m 个不同的鲁棒稳定区域 Ω_{Δ} 。

4 结 论

对于航空发动机结构参数不确定性大范围变化的问题, 通过划分鲁棒稳定界, 将减少设计鲁棒控制器的难度, 但却增加了发动机在不同区域工作时控制器的频繁切换问题, 这一问题的解决有待于今后的进一步研究。

参考文献:

- [1] 申铁龙. Riccati 不等式的负定余裕と 时变パラメータ 摄动に対する H_{∞} ロバスト 准最优制御[C]. 计测自动制御学会论文集, 1992, 28(4): 472- 477.
- [2] Postlethwaite I, et al. A Digital Multi-Mode H_{∞} Controller for the Spey Turbofan Engine[C]. 3rd European Control Conference, Rome, Italy, 1995: 147- 152.
- [3] Doyle J C, et al. State Space Solutions to Standard H_2 and H_{∞} Control Problems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1989, 34(8): 831- 847.
- [4] 申铁龙. H_{∞} 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- [5] 王曦. 航空发动机结构不确定性系统多变量鲁棒 H_{∞} 控制[D]. 西安: 西北工业大学博士学位论文, 1998.

(责任编辑 王震华)

Stability Robustness Bounds for H_{∞} State Feedback Control of Aeroengine

WANG Xi¹, ZENG Qing-fu²

1. 4th Dept., Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;
2. 7th Dept., Northwest Polytechnic University, Xi'an 710072, China

Abstract: The uncertainty system with the structured parameter of aeroengine was investigated, according to T. Shen's conception^[1] of the negative margin of algebraic Riccati inequality. The criterions of defining stability robustness bounds for designing the H_{∞} state feedback controller were provided, based on the nominal model, and its scan-searching algorithm was given.

Key words: H_{∞} control; uncertain disturbance; Riccati inequality; Hamiltonian matrix; negative margin